

משפט הפיצול של קבוצות נל"ח

משפט. תהייה C ו- D קבוצות נל"ח כך ש- D אינה חשיבה. אז C היא אחד של שתי קבוצות נל"ח A, B זרות כך ש- D אינה חשיבה מאף אחת מהן.

נתחיל בתאור רעיון הבניה של הקבוצות A, B . מכיוון שאלו אמורות להיות קבוצות נל"ח נתאר תהליך חישוב אינסופי הנותן במהלך ביצועו את כל איבריהן. במהלך בניית קבוצות אלו נדאג לבצע את המשימות הבאות שיבטיחו שהקבוצות תהיינה כפי שאנו רוצים. לכל מספר טבעי k המשימה C_k היא שאם ידוע לנו ש- $k \in C$ אז להכניס את k ל- A או ל- B . לכל תוכנית I לחישוב פונקציה עם משתנה אחד בעזרת אוב המשימה A_I היא לדאוג לכך ש- $[I]^A \neq D$ והמשימה B_I היא לדאוג לכך ש- $[I]^B \neq D$. מכיוון שביצוע משימה אחת מפריע לעיתים לביצוע משימה אחרת נסדר את המשימות לפי טיפוס הסדר של המספרים הטבעיים ונתבונן בסידור זה כבסדרת קדימויות, כלומר משימה הקודמת לחברתה בסדר זה נחשבת לבעלת קדימות גבוהה יותר. זה אומר שבשלב התהליך נכניס איברים ל- A ול- B כדי לבצע משימה מסויימת גם אם הדבר פוגע בביצוע משימה בעלת קדימות נמוכה יותר.

בביצוע המשימה A_I עלינו לדאוג לכך שיהיה k כך ש- $[I]^A(k) \neq D(k)$. בשלב בו אנו בוחרים k כזה נמצא בידינו רק חלק סופי של A שנשמנו זמנית ב- A^* וכל מה שאנו יודעים בשלב זה הוא ש- $[I]^{A^*}(k) \neq D(k)$. במהלך החישוב של $[I]^{A^*}(k)$ נעשה שימוש בכך שמספרים מסויימים, במספר סופי, אינם ב- A^* , ונסמן את קבוצת המספרים הללו ב- x . אם איברי x לא יוכנסו ל- A כי אז, לפי עקרון השימוש, יהיה $[I]^A(k) = [I]^{A^*}(k)$ ואז יתקיים גם $[I]^A(k) \neq D(k)$, ולזה אנו שואפים. קבוצות x אלו נקראות **הגבלות** והקדימות של הגבלה כזאת תהיה הקדימות של המשימה A_I .

C ו- D הן קבוצות נל"ח, ולכן אנו יכולים להניח שהן קבוצות העצירה W_{J_1} ו- W_{J_2} של התוכניות J_1 ו- J_2 . נסמן ב- C^s את קבוצת המספרים $k \leq s$ כך שחישוב $[J_1](k)$ מסתיים בכלל היותר s צעדים. C^s היא קבוצה סופית שאפשר לחשב את כל איבריה במספר סופי של צעדים, וקיים $\bigcup_{s=1}^{\infty} C^s = C$. כמו כן נסמן ב- D^s את קבוצת המספרים $k \leq s$ כך שחישוב $[J_2](k)$ מסתיים בכלל היותר s צעדים. גם D^s היא פונקציה חשיבה של s , ו- $\bigcup_{s=1}^{\infty} D^s = D$.

כעת נבנה את קבוצות הנל"ח A ו- B בשלבים. בשלב s הכנסנו לכל אחת משתי קבוצות אלו מספר סופי של מספרים. את קבוצות המספרים שהוכנסו ל- A ול- B לפני שלב s נסמן ב- A^s וב- B^s . בשלב s , כשאנו מחשבים את $[I^{A^s}](k)$ אנו יוצרים את ההגבלה שהיא הקבוצה $x_{A,I,k}$ של המספרים שהאוב נשאל עליהם במהלך חישוב $[I^{A^s}](k)$ ושאינם ב- A^s . $x_{A,I,k}$ היא כמובן קבוצה סופית זרה ל- A^s . לקבוצה $x_{A,I,k}$, וליתר דיוק, לארבעה $\langle A, I, k, x_{A,I,k} \rangle$, נקרא **הגבלת A_I עם אינדקס k** , וכאשר נדבר על הקדימות של הגבלה זאת נתכוון לקדימות של המשימה (A_I) . הגבלת A_I עם I כלשהו נקראת הגבלת A . הגבלת A_I עם אינדקס k נקבעת כדי למנוע ככל האפשר את הכנסת איבריה לקבוצה A , ואם נצליח בזאת ובסוף התהליך A תהיה זרה ל- $x_{A,I,k}$ אז, כפי שכבר ראינו, קיים $[I^A](k) = [I^{A^s}](k)$. ייתכנו מספר הגבלות A_I עם אינדקסים שונים. הוא הדין להגבלות B_I . בשלב s בבניית הקבוצות A ו- B מוכרות לנו, בנוסף על הקבוצות A^s ו- B^s , הגבלות A ו- B עם אינדקסים k שונים. אם הגבלת A היא זרה ל- A^s נקרא לה **פעילה** בשלב זה, כי יש עדיין סיכוי ש- A תהיה זרה לה, ואחרת ההגבלה נקראת **מבוטלת** בשלב זה, כי היא לא הצליחה להשאר זרה ל- A . ברור שאם הגבלת A מבוטלת בשלב מסויים היא נשארת מבוטלת משלב זה ואילך. הגבלת A הנשארת פעילה מאז שהיא נוצרה עד סוף התהליך נקראת הגבלת A **קבועה**.

נתאר עתה מה קורה בשלבים s השונים. בכל שלב מטופלת אחת המשימות הנ"ל, אולם שלב בודד אינו מבטיח שמטרת המשימה אמנם תושג, ולכן אנו מטפלים בכל משימה באינסוף שלבים.

שלב s בו מטופלת המשימה (C_k) . רק בשלבים מסוג זה מוכנסים מספרים ל- A ול- B ועקב כך הגבלות יכולות להשתנות מפעילות למבוטלות. בשלב זה נפעל רק אם $k \in C^s$ ו- $k \notin A^s \cup B^s$. אם k אינו באף

הגבלה פעילה נכניס אותו ל- A . אם k נמצא בהגבלה פעילה כלשהיא נכבד את ההגבלה בעלת הקדימות הגבוהה ביותר בה נמצא k בכך שאם זאת הגבלת A נשים את k ב- B ואם זאת הגבלת B נשים את k ב- A . מכיוון שלכל $k \in C$ קיים s_k כך ש- $k \in C^s$ לכל $s \geq s_k$, ויש s כזה כך שבשלב s מטופלת המשימה (C_k) אז k מוכנס לאחת הקבוצות A או B בשלב זה ומשהדבר נעשה כבר אינו מוכנס לקבוצה השניה בשום שלב מאוחר יותר, לכן $C = A \cup B$ ו- A, B זרות.

שלב s בו מטופלת המשימה (A_I) . נדון עתה בשאלה מה יש לעשות בשלב זה. כפי שהזכרנו כבר לעיל אנו רוצים למצוא k כך ש- $[I]^{A^s}(k) \neq D(k)$. מ- D איננו מכירים בשלב זה רק את D^s ולכן סביר שנקח k כך ש- $[I]^{A^s}(k) \neq D^s(k)$. יש טעם בכך רק אם הדבר יביא לכך ש- $[I]^{A^s}(k) \neq D(k)$. אם "אמת" $D^s(k) =$ אז כמובן שגם "אמת" $D(k) =$ והצעד שעשינו יהיה מוצלח, אבל אם "שקר" $D^s(k) =$ אז אין לנו כל מושג מה יהיה הערך של $D(k)$ ואין לנו כל שליטה על ערך זה כי D היא קבוצה נתונה. לכן נצטרך לטפל רק במקרה בו "אמת" $D^s(k) =$ ו-"שקר" $[I]^{A^s}(k) =$. לכן הדרישה הראשונה שלנו מן ה- k אותו נבחר היא (א) "שקר" $[I]^{A^s}_s(k) =$.

האינדקס התחתון s באגף שמאל של (א) אומר שנעשים לכל היותר s צעדים בחישוב של $[I]^{A^s}(k)$ ואם התוצאה לא מתקבלת במשך צעדים אלו אז $[I]^{A^s}_s(k)$ אינו מוגדר. דבר זה דרוש כי איננו בטוחים שחישוב $[I]^{A^s}(k)$ מסתיים אי פעם.

נראה שלא תהיה לנו בעייה למצוא k -ים המקיימים את (א) עבור s גדול מספיק כי אם התנאי קיים רק למספר סופי של k -ים אז $[I]^A$ תהיה קבוצה בעלת משלים סופי, ולכן קבוצה חשיבה, בניגוד להנחתנו על D , אולם מה מבטיח לנו שאנו יכולים למצוא k כזה שיהיה בתוך D^s ? לכן לא נוסיף ל-(א) דרישה ש- k יהיה בתוך D^s וכתחליף לא נסתפק ב- k יחיד לביצוע המשימה A_I אלא כאשר נחזור לביצוע המשימה שוב ושוב ניצור k -ים נוספים כאלו, ואם שום דבר לא יעמוד בדרכנו במשך התהליך תהיה לנו בסופו קבוצה נל"ח אינסופית של k -ים כאלו. האם יש לנו סיבה להניח שמבין אינסוף k -ים אלו יהיה אחד הנמצא ב- D ? לפי הנחותינו עד כה אין לנו סיבה להניח זאת, אולם אם D היא קבוצה פשוטה אז המצב שונה כי לקבוצה פשוטה יש איבר משותף עם כל קבוצה נל"ח אינסופית. מכיוון שהמשפט אינו מתייחס רק לדרגה של D , ומכיוון שכל דרגה נל"ח מכילה קבוצה פשוטה, אנו יכולים להניח ש- D היא קבוצה פשוטה, ונעשה זאת מכאן ואילך. כדי שהתהליך ינסה ליצור הגבלות A_I עם אינסוף אינדקסים k נרצה שבשלבם השונים של ביצוע המשימה A_I תיווצרנה הגבלות A_I עם אינדקסים שונים, ולכן אנו דורשים מן ה- k החדש: (ב) k אינו ארגומנט של הגבלת A_I פעילה.

כתוצאה מדרישה זאת יש בכל שלב לכל היותר הגבלת A_I פעילה אחת עם ארגומנט k . כפי שכבר הזכרנו וכפי שנוכיח בהמשך אם ניצור אינסוף k -ים כאלו לפחות אחד מהם יהיה ב- D . ברגע שמצאנו k כזה הנמצא ב- D הושגה המטרה לשמה יצרנו k -ים רבים כאלו, ואיננו זקוקים ל- k -ים נוספים כאלו. יתר על כן, אם נמשיך ליצור k -ים כאלו, עם ההגבלות המתאימות, אנו עלולים להפריע בביצוע משימות בעלות עדיפות נמוכה יותר. לכן משנראה בשלב s שיש כבר k כזה הנמצא ב- D^s לא ניצור הגבלות A_I נוספות. הדרישה המתאימה היא:

(ג) אין מספר שהוא ארגומנט בהגבלת A_I פעילה והוא גם ב- D_s .

לכן בשלב s איננו עושים דבר אלא אם מתקיים תנאי (ג) וקיים $s \leq k$ הממלא אחר התנאים (א)-(ב), ואם יש k זה אז עבור ה- k המזערי הזה אז אנו יוצרים הגבלת A_I $x_{A_I, k}$ עם אינדקס k המכילה את המספרים שהאוב נשאל עליהם במהלך חישוב $[I^{A^s}](k)$ ושאינם ב- A^s . מכיוון שהגבלה זאת זרה ל- A^s היא פעילה בשלב זה.

שלב s בו מטופלת המשימה (B_I) . בשלב זה נעשה מה שנאמר לעיל על מה שנעשה בשלבים בהם מטופלת המשימה (A_I) , בהחלפת A בכל מקום ב- B .

אנו מגדירים $A = \bigcup_{s=1}^{\infty} A^s$ ו- $B = \bigcup_{s=1}^{\infty} B^s$.

למה. לכל תוכנית I , נוצרות במשך כל התוכנית רק מספר סופי של הגבלות A_I ו- B_I .

הוכחה: באינדוקציה על הקדימות של המשימה (A_I) , וכן ל- (B_I) . הנחת האינדוקציה היא שלכל משימה בעלת קדימות גבוהה מזו של (A_I) נוצרות רק מספר סופי של הגבלות.

ראשית, נחזור ונראה מה גורם להגבלת A_I פעילה x להפוך למבוטלת. זה קורה בשלב בו מטופלת משימה (C_k) , היכן ש- k הוא איבר של x , ובמהלך הטיפול בשלב זה מוכנס k ל- A . למרות ש- k נמצא ב- x שהיא הגבלת A , הוא נכנס ל- A ולא ל- B משום שהוא נמצא בהגבלת B בעלת קדימות גבוהה מזו של x . לפי הנחת האינדוקציה מספר הגבלות ה- B בעלות קדימות גבוהה מזו של x הוא סופי ולכן מספר איבריהן סופי ולכן מבוטלות, במשך כל התהליך, רק מספר סופי של הגבלות A_I .

תהי $E_{A,I}$ קבוצת הארגומנטים של הגבלות A_I הקבועות ותהי $E_{A,I}^s$ קבוצת הארגומנטים של הגבלות A_I הפעילות בשלב s . $E_{A,I}^s$ היא פונקציה חשיבה של s . מכיוון שרק מספר סופי של הגבלות A_I מתבטלות במשך התהליך קיים שלב s_0 שממנו ואילך לא מתבטלות יותר הגבלות A_I , והגבלות ה- A_I הקבועות הן הגבלות A_I הפעילות בשלב זה וכל הגבלות A_I הנוצרות בשלבים הבאים, ולכן קבוצת הארגומנטים של הגבלות אלו היא נל"ח (כי $k \in E_{A,I} \leftrightarrow \exists s(s \geq s_0 \wedge k \in E_{A,I}^s)$). אם $E_{A,I}$ אינסופית אז מכיוון ש- D פשוטה קיים $k \in D \cap E_{A,I}$. לכן עבור s מספיק גדול ישנה הגבלת A_I קבועה עם ארגומנט k הנמצא ב- D^s . לפי תנאי (ג) דלעיל לא נוצרות משלב זה ואילך הגבלות A_I נוספות, וזה סותר את הנחתנו ש- $E_{A,I}$ היא אינסופית. לכן $E_{A,I}$ היא סופית, ומכיוון שלכל k ב- $E_{A,I}$ ישנה רק הגבלת A_I פעילה יחידה עם ארגומנט k יש רק מספר סופי של הגבלות A_I קבועות.

מכיוון שיש רק מספר סופי של הגבלות A_I מבוטלות ומספר סופי של הגבלות A_I קבועות אז יש רק מספר סופי של הגבלות A_I , ובכך הוכחה הלמה.

כעת נוכיח את טענת המשפט. כבר הזכרנו לעיל כי ביצוע המשימות C_k מבטיח ש- $C = A \cup B$ וש- A, B קבוצות זרות. נוכיח עתה כי גם המשימה A_I מתבצעת, ובאותו אופן גם B_I מתבצעת.

- (1) אם קיימת הגבלת A_I קבועה עם ארגומנט k הנמצא ב- D אז A_I התבצעה.
 - (2) אם קיים $k \notin D$ כך ש- "אמת" $[I]^A(k)$ או ש- $[I]^A(k)$ לא מוגדר גם אז A_I התבצעה.
- נראה שאחת משתי האפשרויות (1) ו-(2) חייבת להתקיים. אחרת, יהי k ש- $k \notin D$ ו- k אינו הארגומנט של אף הגבלת A_I קבועה. קיים k כזה כי המשלימה ל- D אינסופית ומספר הגבלות A_I סופי. (2) אינו קיים ולכן, מכיוון ש- $k \notin D$, קיים "שקר" $[I]^A(k)$. נבחר s בו מטופלת המשימה A_I והוא מספיק גדול כך ש- "שקר" $[I]_s^A(k)$ ובשלב זה ואחריו לא נוצרות ולא מבוטלות הגבלות A_I . לכן הגבלות A_I הפעילות בשלב s הן בדיוק הגבלות A_I הקבועות. תנאי (ג) לעיל קיים כי (1) לא קיים, ו- k ממלא אחר התנאים (א) ו-(ב) דלעיל. לכן בשלב s נוצרת הגבלת A_I חדשה (עם הארגומנט k או עם ארגומנט קטן ממנו), בסתירה לבחירת s .